Analysis

Ableitungsregeln

Übersicht
und einige Beweise

(Fortsetzung des Textes 40101)

Datei 41099

Stand 2. Dezember 2020

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der Themenkomplex „Ableitungen, Differenzenquotient und Differentialquotient“ hat seinen Ursprung in der Suche nach der Steigung einer Kurventangente. Diese wird durch einen Grenzwertprozess berechnet. Dies wird sehr ausführlich und mit vielen Beispielen im Text 41101 gezeigt.

In diesem Text, der eigentlich die Fortsetzung davon ist (doch die Nummer 41102 war schon belegt), geht es nun darum, dass die Berechnung einer Ableitung als Grenzwert viel zu umständlich ist. Es gibt Ableitungsregeln, mit denen man schneller das gesuchte Ergebnis hat. Diese Regeln kann man auch mit der Grenzwertmethode beweisen.

In vorliegendem Text zeige ich, welche Ableitungsregeln es gibt, und wie man sie beweisen kann. Die zahlreichen Übungen zu den vielen Funktionsarten folgen in den weiteren Texten.

Insofern ist dieser Text eigentlich für die besonders Interessierten geschrieben, die Überblick haben wollen und gerne den Dingen etwas auf den Grund gehen:

Texte zur Ableitungsthematik:

41099	Ableitungsregeln (Dieser Text)
41100	**Zentraltext für Ableitungen**
41101	Ableitungen mit der Grenzwertmethode berechnen.
41102	Übungen zur Ableitung ganzrationale Funktionen (mit Potenzregel, der Regel für konstante Faktoren und der Summenregel), dann gebrochen-rationalen Funktionen, die man in die Potenzschreibweise setzen kann, und einfache Wurzelfunktionen. *Kettenregel, Produktregel und Quotientenregel werden nicht verwendet.* ***(Also einfaches Grundkursniveau)***
41103	Kettenregel mit Anwendungen auf viele Funktionsarten
41105	Implizite Ableitungen (Teil 1 auf (höherem) Schulniveau
51020	Implizite Ableitungen (Teil 2 für Studenten)
41113	Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, **Differenzierbarkeit**.
41130	50 Ableitungsbeispiele (Arbeit eines Schülers)
43015	Ableitung **gebrochen rationaler Funktionen** – Quotientenregel, Kettenregel
43016	Die Übungsaufgaben aus 43015
44012	Ableitung von **Wurzelfunktionen**, auch komplizierte Funktionen
45015	Ableitung von **Exponentialfunktionen**.
45021	Ableitung von Exponentialfunktionen mit vollständiger Induktion
46012	Ableitung von **Logarithmusfunktionen**
47015	Ableitung von **trigonometrischen Funktionen**
47301	Ableitung der Arkusfunktionen
51101	Ableitung der hyperbolischen Funktionen
51111	Ableitung der Areafunktionen

Inhalt

1. Die Ableitung von Potenzfunktionen: Die Potenzregel.

$$\boxed{f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$ für beliebiges $n \in \mathbb{R}$

Beispiele:

a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$ usw.

$f(x) = 1 = x^o \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0$

Man kann manche Brüche als Potenzen schreiben:

b) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ usw.

Man kann manche Wurzeln als Potenzen schreiben:

c) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ usw.

2 Ableitung von Vielfachen und Summen

Eine Funktion wie $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2 + 5$ können wir mit der Potenzregel allein nicht ableiten.

Ihr Funktionsterm ist eine Summe, und die Summanden sind Vielfache von Potenzen.
Es gibt praktischerweise zwei Regeln, die genau dazu passen.

(1) **Beginnen wir mit den Vielfachen von Potenzen:**

Für die Ableitung von $\frac{1}{8}x^4$ bleibt $\frac{1}{8}$ einfach stehen und man leitet nur x^4 ab:

$$\left(\tfrac{1}{8}x^4\right)' = \tfrac{1}{8}\cdot 4x^3 = \tfrac{4}{8}x^3 = \tfrac{1}{2}x^3$$

Für die Ableitung von $-3x^2$ bleibt -3 einfach stehen und man leitet nur x^3 ab:

$$\left(-3x^2\right)' = -3\cdot 2x = -6x$$

Die Ableitung von 5 ist 0, fällt also weg.

(2) **Summen leitet man ab, indem man jeden Summanden einzeln ableitet.**

Damit kann man f so ableiten:

$$f(x) = \tfrac{1}{8}x^4 - 3x^2 + 5 \qquad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{8}\cdot 4x^3 - 3\cdot 2x = \tfrac{1}{2}x^3 - 6x$$

Man kann diese beiden Regeln so als Formeln aufschreiben:

Konstante-Faktoren-Regel

$$\boxed{g(x) = k\cdot f(x) \;\Rightarrow\; g'(x) = k\cdot f'(x)}$$

Die Summenregel

$$\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)}$$

Nicht zum Erschrecken: Ein krasses Beispiel soll die Wirkung beider Regeln zeigen.

Damit kann man so kompliziert aussehende Terme ableiten: $f(x) = \dfrac{3x^2 - \sqrt{x} + 5}{\sqrt{2x}}$

Zuerst zerlegt man den Term in drei Brüche und vereinfacht sie mit den Potenzgesetzen:

$$f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} \qquad (\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}})$$

Jetzt kommt die Summenregel zum Einsatz: Jeder Summand wird für sich abgeleitet.
Dabei bleiben die konstanten Faktoren einfach stehen und die x-Potenzen werden mit der Potenzregel abgeleitet. Dabei muss man über Wurzeln und Potenzen Bescheid wissen.

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 0 + \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}\sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{2}\,x\sqrt{x}}$$

3 Ableitung von Produkten

Funktionen, deren Term ein Produkt kann man oft günstig mit der sogenannten Produktregel ableiten

Die Produktregel

$$\boxed{f(x) = u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)}$$

Oft scheibt man abgekürzt nur $(u\cdot v)' = u'v + v'u$

Das heißt: Der 1. Faktor wird abgeleitet und mit dem gegebenen 2. Faktor multipliziert.
Dann wird der 2. Faktor abgeleitet und mit dem gegebenen 1. Faktor multipliziert.
Beide Produkte werden addiert.

Beispiele: a) $f(x) = x^2\cdot(x^3 - 4x)$

$u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$

$v(x) = x^3 - 4x \qquad v'(x) = 3x^2 - 4$

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{u'}\cdot(x^3 - 4x) + \underbrace{(3x^2 - 4)}_{v'}\cdot x^2$$

b) $f(x) = (x^2 - 5x - 1)\cdot(x^3 + 8x^2)$

$u(x) = x^2 - 5x - 1 \qquad u'(x) = 2x - 5$

$v(x) = x^3 + 8x^2 \qquad v'(x) = 3x^2 + 16x$

Wer schon diese Ableitungen kennt:

$\boxed{f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x}$, $\boxed{f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)}$ und $\boxed{f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}}$

Kann die folgenden Berechnungen mit der Produktregel nachvollziehen:

c) $f(x) = 2x\cdot e^{x+1}$ $\qquad f'(x) = 2\cdot e^{x+1} + e^{x+1}\cdot 2x = 2e^{2x}\cdot(1+x)$

d) $f(x) = x\cdot\sin x$ $\qquad f'(x) = 1\cdot\sin(x) + \cos(x)\cdot x = \sin x + x\cdot\cos x$

e) $f(x) = (x^2 + 1)\cdot\ln(x)$ $\qquad f'(x) = 2x\cdot\ln(x) + \frac{1}{x}\cdot(x^2+1) = 2x\cdot\ln(x) + \frac{x^2+1}{x}$

Im **Zentraltext für Ableitungen** (41100) und auch in den Ableitungsübungen zu diesen Funktionsarten werden diese Funktionen zusammen mit der Produktregel behandelt. Dort findet man auch die Kettenregel, die in diesem Text nicht besprochen wird, sondern in 41103.

4 Ableitung von Bruchtermen

Bruchfunktionen kann man oft mit der sogenannten Quotientenregel ableiten:

Die Quotientenregel

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

Man schreibt sie kurz oft so: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Man sollte sie nicht in allen Fällen anwenden. Es gibt Beispiele, die nach einer Umformung viel einfacher zu behandeln sind.

Dies wird teilweise im Text 41102 und sehr ausführlich im Text 43015 gezeigt, mit Wurzeln im Text 44012.

Hier verzichte ich daher die Wiederholung dieser Beispiele.

5 Ableitung von verketteten Funktionen mit der Kettenregel

Sehr viele Funktionen kann man dadurch bilden (oder verstehen), dass man sie als Ergebnis der Verkettung zweier Funktionen ansieht. Eine Verkettung ist eine Hintereinanderausführung zweier Funktionen.

Die Funktion $f(x)=\left(x^2-4\right)^5$ ist so eine verkettete Funktion.

Die innere Teilfunktion ist $u=g(x)=x^2-4$.

Hat man deren Wert u berechnet, wird er in die äußere Teilfunktion eingesetzt: $h(v)=v^5$.

Damit ist $f(x)=v(u(x))$ und die Kettenregel liefert $f'(x)=\underbrace{5\cdot\left(x^2-4\right)^4}_{v'}\cdot\underbrace{2x}_{u'}$

Die Kettenregel besagt dann – vereinfacht dargestellt – dass man für die Ableitung von f die Ableitungen der Teilfunktionen g und h multipliziert:

$$f(x)=v(u(x)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x)=\underbrace{v'(u(x))}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{u'(x)}_{\text{innere Ableitung}}}$$

Dies wird ausführlich mit vielen Beispielen im Spezialtext 41103 behandelt.

6 Beweis der Potenzregel $f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Gegeben sei $f(x) = x^n$

Berührpunkt: $P_1\left(x_1 \mid x_1^n\right)$

Nachbarpunkt: $Q\left(x_1 + h \mid (x_1 + h)^n\right)$ mit $h \neq 0$.

Zur Berechnung von $(x_1 + h)^n$ benötigt man das Pascalsche Dreieck:

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1

Der schräge Kasten zeigt, dass ab n = 1 der jeweils 2. Koeffizient die Zahl n ist, also der Exponent der Formel. Also gilt folgendes:

$$\left(x_1 + h\right)^n = x_1^n + \boxed{n} \cdot x_1^{n-1} \cdot h + k \cdot x_1^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + h^n$$

Ab dem 3. Summanden tritt h mit einer Potenz von mindestens 2 auf. Diese Summanden werden bei der Grenzwertbildung $h \to 0$ alle Null. Welche Koeffizienten (k usw.) dabei stehen, ist also egal.

Sekantensteigungsfunktion:

$$m_s(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_1 + h)^n - x_1^n}{h} = \frac{\left(x_1^n + n \cdot x_1^{n-1} h + k \cdot x_1^{n-2} h^2 + \ldots + h^n\right) - x_1^n}{h}$$

$$= \frac{h \cdot \left(n \cdot x_1^{n-1} + k \cdot x_1^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}\right)}{h} = n \cdot x_1^{n-1} + k \cdot x_1^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion:

$$m_T = \lim_{h \to 0} m_s(h) = n x_1^{n-1}$$

Ableitungsfunktion: $f'(x) = n x^{n-1}$

7 Beweis der Konstante-Faktoren-Regel

Unsere Funktion sei jetzt $g(x) = k \cdot f(x)$.

Berührpunkt: $P_1(x_1 \mid g(x_1)) = (x_1 \mid k \cdot f(x_1))$

Nachbarpunkt: $Q(x_1 + h \mid k \cdot f(x_1 + h))$ mit $h \neq 0$.

Sekantensteigungsfunktion:

$$m_s(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k \cdot f(x_1+h) - k \cdot f(x_1)}{h} = k \cdot \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion:

$$m_T = \lim_{h\to 0} m_s(h) = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot f(x_1+h) - k \cdot f(x_1)}{h} = k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = k \cdot f'(x_1)$$

denn es ist ja $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1)}$. WISSEN !!!

8 Beweis der Summen-Regel

Unsere Funktion sei jetzt $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Berührpunkt: $P_1(x_1 \mid f(x_1)) = (x_1 \mid f_1(x_1) + f_2(x_1))$

Nachbarpunkt: $Q(x_1 + h \mid f_1(x_1+h) + f_2(x_1+h))$ mit $h \neq 0$.

Sekantensteigungsfunktion:

$$m_s(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f_1(x_1+h) + f_2(x_1+h)] - [f_1(x_1) + f_2(x_1)]}{h} = \frac{[f_1(x_1+h) - f_1(x_1)] + [f_2(x_1+h) - f_2(x_1)]}{h}$$

$$m_s(h) = \frac{f_1(x_1+h) - f_1(x_1)}{h} + \frac{f_2(x_1+h) - f_2(x_1)}{h}$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion:

$$m_T = \lim_{h\to 0} m_s(h) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f_1(x_1+h) - f_1(x_1)}{h} + \frac{f_2(x_1+h) - f_2(x_1)}{h} \right]$$

$$m_T = \lim_{h\to 0} m_s(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_1+h) - f_1(x_1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f_2(x_1+h) - f_2(x_1)}{h} = f_1'(x_1) + f_2'(x_1)$$

Daraus folgt die Summenregel.

9 Beweis der Produktregel

Schreibt man einen Produktterm in der Form $u(x)\cdot v(x)$, dann liegen im Grund zwei voneinander unabhängige Funktionen vor, die durch die Änderung von x_1 um h wie folgt reagieren:

Berührpunkt: $P_1(x_1 \mid u(x_1)\cdot v(x_1))$

Nachbarpunkt: $Q(x_1+h \mid u(x_1+h)\cdot v(x_1+h))$.

Um zu einem günstigen Rechnungsverlauf zu kommen sollte man so argumentieren:
Der Wert $u(x_1+h)$ entsteht aus $u(x_1)$ durch Veränderung um einen Wert Δu.

Also ist: $u(x_1+h)=u(x_1)+\Delta u$ (1)

Entsprechend ist: $v(x_1+h)=v(x_1)+\Delta v$ (2)

Damit berechnet man nun die **Sekantensteigung** zu (P_1Q):

$$m_s(h)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x_1+h)\cdot v(x_1+h)-u(x_1)\cdot v(x_1)}{h}$$

Mit (1) und (2): $$m_s(h)=\frac{[u(x_1)+\Delta u]\cdot[v(x_1)+\Delta v]-u(x_1)\cdot v(x_1)}{h}$$

$$m_s(h)=\frac{u(x_1)\cdot v(x_1)+u(x_1)\cdot\Delta v+\Delta u\cdot v(x_1)+\Delta u\cdot\Delta v-u(x_1)\cdot v(x_1)}{h}$$

Nun muss man geschickt zusammenfassen:

$$m_s(h)=\frac{\cancel{u(x_1)\cdot v(x_1)}+u(x_1)\cdot\Delta v+\Delta u\cdot v(x_1)+\Delta u\cdot\Delta v-\cancel{u(x_1)\cdot v(x_1)}}{h}$$

$$m_s(h)=\frac{u(x_1)\cdot\Delta v}{h}+\frac{\Delta u\cdot v(x_1)}{h}+\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{h}$$

Oder besser so: $$m_s(h)=u(x_1)\cdot\frac{\Delta v}{h}+v(x_1)\cdot\frac{\Delta u}{h}+\frac{\Delta u}{h}\cdot\Delta v$$

Berechnung der Tangentensteigung durch den Grenzwert für $h\to 0$. Dann geschieht folgendes:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta v}{h}=v'(x_1) \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}=u'(x_1) \quad \text{sowie} \quad \lim_{h\to 0}\Delta v=0$$

Damit folgt: $$\underbrace{\lim_{h\to 0}[m_s(h)]}_{f'(x_1)}=u(x_1)\cdot\underbrace{\left[\lim_{h\to 0}\frac{\Delta v}{h}\right]}_{v'(x_1)}+v(x_1)\cdot\underbrace{\left[\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\right]}_{u'(x_1)}+\underbrace{\left[\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\right]}_{u'(x_1)}\cdot\underbrace{\left[\lim_{h\to 0}\Delta v\right]}_{=0}$$

Teilergebnis: $f'(x_1)=u(x_1)\cdot v'(x_1)+u'(x_1)\cdot v(x_1)$

Lässt man den Index 1 weg und vertauscht die Reihenfolge, dann erhält man die Ableitungsfunktion in der Form, in der man die Produktregel in der Regel aufschreibt:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$$

10 Beweis der Quotientenregel

1. Beweis mit der Grenzwertmethode:

Unsere Funktion sei $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$.

Berührpunkt: $P_1\left(x_1 \mid \frac{u(x_1)}{v(x_1)}\right)$

Nachbarpunkt: $Q\left(x_1+h \mid \frac{u(x_1+h)}{v(x_1+h)}\right)$ mit $h \neq 0$.

Sekantensteigungsfunktion:

$$m_s(h)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{u(x_1+h)}{v(x_1+h)}-\frac{u(x_1)}{v(x_1)}}{h}=\frac{\frac{u(x_1+h)\cdot v(x_1)}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)}-\frac{u(x_1)\cdot v(x_1+h)}{v(x_1)\cdot v(x_1+h)}}{h} \qquad (1)$$

$$=\frac{\frac{u(x_1+h)\cdot v(x_1)-u(x_1)\cdot v(x_1+h)}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)}}{h}=\frac{u(x_1+h)\cdot v(x_1)-u(x_1)\cdot v(x_1+h)}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)\cdot h} \qquad (2)$$

Erklärung: In (1) wurden die beiden Brüche im Zähler durch Erweitern gleichnamig gemacht, damit man sie subtrahieren kann, was in (2) geschehen ist.

Auch Grund der Regel $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}$ (Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Nenner mit ihr multipliziert, ist der zweite Term in (2) entstanden.

Als nächstes füge ich in den Zähler eine Nullsumme ein und zwar

$-u(x_1)v(x_1)+u(x_1)v(x_1)$.

$$=\frac{u(x_1+h)\cdot v(x_1)-u(x_1)v(x_1)+u(x_1)v(x_1)-u(x_1)\cdot v(x_1+h)}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)\cdot h}$$ Der Zähler umsortiert:

$$=\frac{\left[u(x_1+h)\cdot v(x_1)-u(x_1)v(x_1)\right]-\left[u(x_1)\cdot v(x_1+h)-u(x_1)v(x_1)\right]}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)\cdot h}$$

Durch das Ausklammern eines Minuszeichens aus der zweiten eckigen Klammer, musste innen ein Minuszeichen gesetzt werden. Jetzt kann man zweimal ausklammern:

$$=\frac{\left[u(x_1+h)-u(x_1)\right]\cdot v(x_1)-u(x_1)\cdot\left[v(x_1+h)-v(x_1)\right]}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)\cdot h}.$$

Als nächstes zerlege ich in 2 Brüche und klammere zwei Nennerterme aus:

$$=\frac{\left[u(x_1+h)-u(x_1)\right]\cdot v(x_1)}{h}-\frac{u(x_1)\cdot\left[v(x_1+h)-v(x_1)\right]}{h}\cdot\frac{1}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)}$$

$$=\left(\frac{u(x_1+h)-u(x_1)}{h}\cdot v(x_1)-\cdot u(x_1)\frac{v(x_1+h)-v(x_1)}{h}\right)\cdot\frac{1}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)}$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion:

$$m_T = \lim_{h\to 0} m_s(h) = \lim_{h\to 0} = \left(\frac{u(x_1+h)-u(x_1)}{h}\cdot v(x_1) - \cdot u(x_1)\frac{v(x_1+h)-v(x_1)}{h}\right)\cdot\frac{1}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)}$$

$$m_T = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{u(x_1+h)-u(x_1)}{h}}_{u'(x_1)}\cdot v(x_1) - \cdot u(x_1)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{v(x_1+h)-v(x_1)}{h}}_{v'(x_1)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x_1+h)\cdot v(x_1)}}_{\frac{1}{\left((v(x_1)\right)^2}}$$

Ergebnis: $$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{h}}$$

2. Beweis mit der Produktregel:

Zuerst erzeugen wir ein Produkt: $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f(x)\cdot v(x) = u(x)$ | Ableiten

Mit Hilfe der Produktregel folgt: $f'(x)\cdot v(x) + f(x)\cdot v'(x) = u'(x)$

Ersetzen von $f(x)$: $f'(x)\cdot v(x) + \dfrac{u(x)}{v(x)}\cdot v'(x) = u'(x)$ | $\cdot v(x)$

$$f'(x)\cdot\left(v(x)\right)^2 + u(x)\cdot v'(x) = u'(x)\cdot v(x)$$

$$f'(x)\cdot\left(v(x)\right)^2 = u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x) \quad | :(v(x))^2$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}}$$

11 Beweis der Kettenregel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = v(u(x))$

Berührpunkt: $P_1(x_1 \mid v(u(x_1)))$

Nachbarpunkt: $Q(x_1 + h \mid v(u(x_1 + h)))$ mit $h \neq 0$.

Sekantensteigungsfunktion:

$$m_s(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(u(x_1+h)) - v(u(x_1))}{h}$$

Dieser Bruch wird jetzt erweitert mit $\frac{u(x_1+h) - u(x_1)}{u(x_1+h) - u(x_1)}$

$$m_s(h) = \frac{v(u(x_1+h)) - v(u(x_1))}{h} \cdot \frac{u(x_1+h) - u(x_1)}{u(x_1+h) - u(x_1)}$$ Umsortieren:

$$m_s(h) = \frac{v(u(x_1+h)) - v(u(x_1))}{u(x_1+h) - u(x_1)} \cdot \frac{u(x_1+h) - u(x_1)}{h}$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion:

$$m_T = \lim_{h\to 0} m_s(h) = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{v(u(x_1+h)) - v(u(x_1))}{u(x_1+h) - u(x_1)}}_{v'(u(x_1))} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{u(x_1+h) - u(x_1)}{h}}_{u'(x_1)} \boxed{= v'(u(x_1)) \cdot u'(x_1)}$$

Genauer: Wenn $h \to 0$, dann $\underbrace{u(x_1+h)}_{u_1+r} \to \underbrace{u(x_1)}_{u_1}$ und dann gilt $\underbrace{v(u(x_1+h))}_{v(u_1+r)} \to \underbrace{v(u(x_1))}_{v(u_1)}$

und dann ist $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(u(x_1+h)) - v(u(x_1))}{u(x_1+h) - u(x_1)} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{v(u_1+r) - v(u_1)}{r} = v'(u_1)$

Ergebnis: $\boxed{f(x) = v(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)}$